MFU – ein Kurs zur Förderung mathematischer Begabung von 10-14 Jährigen

PETRA HAUER-TYPPELT, WIEN

„MFU – Mathe-Fans an die Uni!“ ist ein Kurs, der für besonders an der Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien angeboten wird. In diesem Beitrag werden Konzeption, Ziele und Inhalte des Kurses vorgestellt, dabei wird insbesondere auf Aspekte des Problemlösens eingegangen. Außerdem wird über Ergebnisse einer Studie berichtet, die im Kurs gemeinsam mit Studierenden zum Themenbereich „Problemlösen“ durchgeführt wurde.

1. Eckdaten und Grundidee von MFU

Um Schülerinnen und Schülern der AHS-Unterstufe Gelegenheit zu geben, sich zusätzlich zum schulischen Unterricht regelmäßig mit Mathematik zu beschäftigen, wurde der Kurs „MFU – Mathe-Fans an die Uni!“ 2008 von Univ.-Prof. Hans Humenberger initiiert und vom vierköpfigen Gründerteam (Christoph Ableitinger, Anita Dorfmayr, Petra Hauer-Typpelt, Hans Humenberger) konzipiert. Unterstützt wurde der Kurs von Beginn an dankenswerter Weise vom Stadtschulrat für Wien, der beispielsweise dafür Sorge trägt, dass die Kurseinladungen zuverlässig jeweils zu Semesterbeginn an den Schulen landen. Mathematiklehrerinnen und -lehrer werden in einem Begleitschreiben gebeten, die Einladungen an aus ihrer Sicht geeignete Schülerinnen und Schüler weiterzuleiten. Pro Semester werden zwei Kurse abgehalten, im Wintersemester die Kurse für die zweiten und vierten Klassen, im Sommersemester jene für die ersten und dritten Klassen[1]. Jeder Kurs mit ca. 25 Teilnehmern wird von zwei Lehrenden betreut und findet in 14-tägigem Rhythmus, jeweils mit einer Dauer von 90 Minuten statt.
Nachstehender Auszug aus der Kurseinladung, die sich an potentielle Teilnehmer richtet, zeigt Grundidee und Intention des Kurses:

- Du gehst in eine 2. oder 4. Klasse AHS-?
- Du überlegst gerne an mathematischen Aufgabenstellungen?
- Mathematik gehört zu deinen Lieblingsfächern?
- Du wolltest immer schon ein bisschen mehr über Mathematik wissen?

(Fast) alle Fragen mit „Ja“ beantwortet? Dann bist du bei uns richtig!

Die **Fakultät für Mathematik der Universität Wien** bietet mit Unterstützung des Stadtschulrates für Wien den jüngeren Wiener Mathematik-Fans (**AHS-Unterstufe**) eine regelmäßige Gelegenheit, sich **altersgemäß** in einer Art **Mathematik-Werkstatt** mit interessanten Themen der Mathematik auseinanderzusetzen.

Dies können spannende Aufgaben sein, die es in Gruppen oder auch alleine zu lösen gilt, aber auch ausgewählte neue Stoffgebiete, die im Schulunterricht keinen Platz haben. Oft wird es auch um **Begründen** und um **Verstehen** gehen. Besonders wichtig sind dabei Interesse und Begeisterung für Mathematik.

Abbildung 1: Auszug aus der Kursanschreibung

[1] Diese Reihenfolge ist der Tatsache geschuldet, dass Lehrerinnen und Lehrer die Eignung von Schülerinnen und Schülern der ersten Klassen für den Kurs zu Beginn des Sommersemesters wesentlich besser einschätzen können als zu Beginn des Wintersemesters.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 49, 2016, S. 33 - 44

Was Freudenthal zum Lernen von Mathematik formulierte, drückt einen wesentlichen Leitgedanken des Kurses in bester Weise aus:

> „Was dem erwachsenen Mathematiker recht ist – seine eigenen Begriffe zu erfinden und die anderer nachzuerfinden, Mathematik nicht als einen Sachbestand, sondern als eine Tätigkeit zu üben, einen Fehler zu machen und von seinen Fehlern zu lernen – das soll dem Lernenden von Kindesbeinen an billig sein." (Hans Freudenthal, 1973)

Eine Richtungsvorgabe, die wohl für jede Art von Mathematikunterricht ein Ideal darstellt, aber im Regelunterricht die notwendigen Rahmenbedingungen, insbesondere was die zeitlichen Voraussetzungen betrifft, oft nicht findet.

Basierend darauf ergeben sich die Kursinhalte, die im Folgenden schwerpunktmäßig für die 5. und 6. Schulstufe vorgestellt werden, da diese beiden Kurse von Beginn an durchgehend von der Autorin, gemeinsam mit Hans Humenberger, abgehalten wurden.

2. Kursinhalte von MFU

Die inhaltlichen Schwerpunkte in den Kursen für die 5. und 6. Schulstufe bilden einerseits Problemlöseaufgaben, auf die nachfolgend ausführlich eingegangen wird, andererseits attraktive, ergänzende Themen, für die im Schulunterricht kein Platz bleibt. Ein solches ist z. B. das Thema „Geheimschriften" für die Teilnehmer der 5. Schulstufe, mit dem es sehr gut gelingt, für Fragen des Ver- und Entschlüsselns zu begeistern und damit strikte Regelkonformität und kreatives Denken zu verbinden. Ein Beispiel aus dem Kurs für die 6. Schulstufe bildet das Thema „Einführung in das stochastische Denken". Mit einem Spiel (vgl. Hauer-Typpelt, 2011, S. 81ff.) ergeben sich durch die Gegenüberstellung von experimentellen und theoretischen Ergebnissen Zugänge zu zentrale Begriffen wie „Zufall", „relative Häufigkeit" und „Wahrscheinlichkeit" in natürlicher Weise.

2.1 Problemlösen im Kurs MFU

Bei vielen der bearbeiteten Problemlöseaufgaben handelt es sich um geschlossene Denkaufgaben nach einer formal-psychologischen Typisierung (vgl. z. B. Heinrich et al., 2015, S. 282f.). Das heißt es, sind sowohl Ausgangszustand als auch das Ziel klar vorgegeben, offen ist aber wie das Ziel erreicht werden kann. Ob eine Aufgabe für die bearbeitende Person tatsächlich eine Problemlöseaufgabe ist, hängt natürlich auch von den personenspezifischen Voraussetzungen ab. Basierend auf langjähriger schulischer Unterrichtserfahrung gelingt es im Kurs im Allgemeinen aber sehr gut, den Teilnehmerinnen subjektiv neue Herausforderungen zu bieten. Hinsichtlich einer mathematischen Typisierung von Problemlöseaufgaben (vgl. z. B. Heinrich et. al., 2015, S. 281) gibt es prinzipiell keine Einschränkungen, wesentlich ist aber die Passung der Aufgaben an die Altersstufe und die organisatorische Struktur des Kurses.

Das Spektrum reicht von kurzen Knobelaufgaben bis zu komplexeren Aufgabenstellungen, bei denen man aber auch in Teillösungen erfolgreich sein kann. Grundsätzlich ist hervorzuheben, dass gerade bei der Schulung des Problemlösen bei der Aufgabenauswahl besonders auf die (zumindest teilweise) Erfolgsmöglichkeit für die Lernenden zu achten ist. In Abschnitt 2.3. wird kursspezifisch genauer darauf eingegangen.

Heinrich et al. (2015, S. 289) fassen in Anlehnung sowohl an denkpsychologische als auch an mathematikdidaktische Arbeiten folgende Einflussfaktoren für die „Entwicklungs- und Ausführungsqualität" des Problemlösens zusammen:

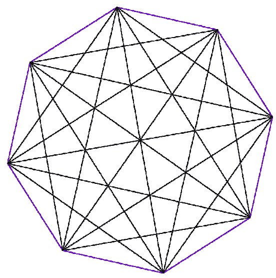
- Kognition – fachliches Wissen und Können
  - Bereichswissen (Definitionen, Sätze, Verfahren, …)

- Heuristische Verfahren und Hilfsmittel ← MFU
- Metakognition – „Management“, Selbstregulation
  - Wissen über (mathematisches) Denken
  - Kontroll- und Steuerungsprozesse bei der Problembearbeitung ← MFU
- Einstellungen und Grundhaltungen
- Rahmenbedingungen des Problemlösens

Wie rechts neben der Aufzählung durch die beiden nach links gerichteten Pfeile herausgestrichen, sind vorrangige Ziele von MFU, bei den Teilnehmern das Wissen um und die Fähigkeit der Anwendung von Strategien und Methoden zum Problemlösen (heuristische Verfahren und Hilfsmittel) zu fördern und damit mathematisches Denken und auch das Wissen darüber (weiter) zu entwickeln. Klarerweise werden durch die intensive Beschäftigung mit mathematischen Problemlöseprozessen auch die anderen genannten Einflussfaktoren angesprochen. Immer wieder kommt es in den Kursen, etwa beim Reflektieren von Lösungen oder durch Fragen der Teilnehmer zur Auseinandersetzung mit neuen Inhaltsbereichen. Es gehört aber nicht zu den ausgewiesenen Zielen, möglichst viele Inhaltsbereiche abzuarbeiten oder gar inhaltlich dem schulischen Lehrplan vorauszuarbeiten. Das wäre für die Teilnehmerinnen kontraproduktiv, denn die Langeweile bei der nachfolgenden Bearbeitung des Themas im Regelunterricht wäre vorprogrammiert.

Der Klassiker „Diagonalen im Vieleck“ ist in der nachfolgenden Version ein typisches Beispiel für eine Problemlöseaufgabe im MFU-Kurs, passend sowohl für die 5. als auch für die 6. Schulstufe.

Aufgabe *Diagonalen im Vieleck*



Rechts siehst du ein regelmäßiges Achteck, in dem alle Diagonalen eingezeichnet sind.

a) Finde einen Weg, um die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen Achteck zu berechnen!
b) Versuche nun eine Formel zu entwickeln, mit der man die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen n-Eck berechnen kann!

Die Zielvorgabe ist klar und ebenso wie die Formulierung der Aufgabe, insbesondere im Teil b), für die Altersstufe anspruchsvoll. Eine Hilfestellung bietet die Struktur der Aufgabe, die vom konkreten Beispiel Achteck zum allgemeinen Fall führt und damit vor allem gewährleistet, dass für alle Schülerinnen und Schüler ein Einstieg in die Aufgabe möglich ist. Die Möglichkeiten zur Lösung zu kommen sind vielfältig, der Bogen der im Kurs beobachteten Tätigkeiten dazu spannt sich vom (mehr oder weniger) systematischen Abzählen im vorgegebenen Achteck, über intuitives Erahnen von (Teil-) Lösungen bis hin zu logisch schlüssigem Vorgehen.

Jedes Kind ist in der Wahl des Weges und der Intensität des Auseinandersetzens mit der Aufgabe frei. Neben der hohen intrinsischen Motivation der Kursteilnehmer, sich mit solchen innermathematischen Aufgabenstellungen auseinanderzusetzen, sind es vor allem auch der unbekümmerte Zugang zu neuen Begriffen und die Fähigkeit diese rasch zu antizipieren, die dazu beitragen, beim Problemlösen erfolgreich zu sein. Begriffe wie „n-Eck“ oder Phrasen wie „eine Formel entwickeln“ sind auch den Mathe-Fans dieser Altersstufe wenig vertraut, werden in der Regel nachgefragt und oft schnell auch in den eigenen Wortschatz aufgenommen.

Die Aufgabe bietet sich auch zum Erklären und Begründen an, verschiedene Lösungswege miteinander zu vergleichen, Gemeinsames und Unterschiedliches aufzudecken.
Erklären und Begründen spielen im Kurs generell eine zentrale Rolle, altersgemäß immer gekoppelt an von den Schülerinnen und Schülern bearbeitete bzw. gelöste Aufgabenstellungen. Mathematische oder

zumindest ansatzweise mathematische Argumentation muss von den Lehrenden erkannt, wertgeschätzt und dadurch gefördert werden. Dabei spielt eine korrekte formale Vorgehensweise nur eine untergeordnete Rolle (je jünger die Lernenden, desto weniger wichtig), wesentlich ist die logische Struktur der Argumentation und diese entsprechend verbalisieren zu lernen.
Es ist essentiell, hier bei den jüngeren Mathe-Fans feinfühlig vorzugehen und keinesfalls auf das Einfordern von Begründungen zu beharren. Denn die Begeisterung über eine selbst gefundene, richtige Lösung ist oft groß, die Sache aus Sicht der jungen Problemlöser schlicht und einfach abgeschlossen und eine Betrachtung aus einem anderen Blickwinkel nicht zwingend interessant. Mit Feuereifer wird lieber eine neue Aufgabe in Angriff genommen.

Wenn es also darum geht, logisch schlüssiges Argumentieren zu lernen, so sollte das zunächst anhand eigener Lösungsprozesse geschehen bzw. besser noch an Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbst auf eine Begründung drängen. Die Bereitschaft zur Reflexion über eigene Lösungen ist teilweise durchaus schon entwickelt oder lässt sich zumindest durch geschicktes Nachfragen recht gut aktivieren. Hingegen ließ sich im Kurs beobachten, dass die Motivation sich mit verschiedenen, bereits vorgegebenen Lösungswegen zu ein und derselben Aufgabe auseinanderzusetzen, dem altersmäßigen Entwicklungsstand entsprechend, meist noch wenig ausgeprägt ist. Reine Argumentationsaufgaben werden daher im MFU-Kurs für die 1. und 2. Klasse kaum eingesetzt. Mit fortschreitendem Alter werden reine Argumentationsaufgaben besser angenommen und bekommen daher im MFU-Kurs für die 3. und 4. Klasse größeres Gewicht.

2.2 Weitere Aufgaben-Beispiele aus den Kursen für die 5. und 6. Schulstufe

Einige weitere Beispiele sollen nun Einblick in das Aufgabenspektrum geben und illustrieren, wie wir versuchen, die Freude an der Mathematik zu vertiefen und gleichzeitig mathematische Fähigkeiten zu fördern.

Aufgabe *Die Schokolade wird mir dein Alter verraten*

Wie oft in der Woche möchtest du Schokolade essen? Wähle eine Zahl größer als 0 und kleiner als 10. Multipliziere diese Zahl mit 2. Addiere 5. Multipliziere das Resultat mit 50. Wenn du im Jahr 2016 schon Geburtstag hattest, dann addiere zum Ergebnis 1766. Wenn nicht, dann addiere 1765. Jetzt zieh dein vierstelliges Geburtsjahr ab.
Wenn du dich nicht verrechnet hast, erhältst du eine dreistellige Zahl:
Die Ziffer an der Hunderterstelle zeigt, wie oft du Schokolade essen möchtest und die verbleibende zweistellige Zahl ist … dein Alter!

Quelle: Unbekannt, jedenfalls findet sich die Aufgabe auch an verschiedensten Stellen im Internet.

Diese Aufgabe punktet vor allem mit dem subjektiv neuen vermeintlichen Zaubertrick. Was für die älteren Mathe-Fans eine altbekannte Sache ist, löst bei den jüngeren Begeisterung aus und führt in diesem Kurs zuverlässig zur Frage „Warum funktioniert das immer?“ und zwar – und das ist wesentlich – von Seiten der Kinder. Die Begründung wird in weiterer Folge von den Kindern oft in quasi-allgemeingültiger Form gefunden, anhand mehrerer durchgeführter Beispiele erkennen sie, dass eine Gesamtbetrachtung der einzelnen Rechenschritte das Erkennen der Manipulation der Ausgangszahlen erleichtert und diese unabhängig von der Wahl der Ausgangszahl und dem eigenen Geburtsjahr ist. Wie bei allen Aufgaben wird ausreichend Zeit gegeben, nur wenn notwendig beim gedanklichen Durchdringen individuell unterstützt und gegebenenfalls, abhängig von den Begründungsansätzen bzw. Nachfragen der Kinder, gemeinsam eine allgemeingültige Begründung besprochen. Für die Schnelleren stehen jedenfalls weitere Aufgaben bereit, beispielsweise die drei folgenden Aufgaben zu „Zahlenspielereien“, von denen die ersten beiden, auch wenn sie es auf den ersten Blick vielleicht nicht verraten, eng mit der „Schokoladeaufgabe“ verwandt sind. Wieder geht es darum, die einzelnen

Rechenschritte gemeinsam zu betrachten, dann ist leicht zu erkennen, dass beispielsweise bei der ersten Aufgabe die Multiplikation mit 1001 (= $7 \cdot 11 \cdot 13$) das dann gar nicht mehr überraschende Ergebnis liefert.

Drei Aufgaben zu Zahlenspielereien

- Denk die eine dreistellige Zahl und multipliziere sie nacheinander mit 7, 11 und 13. Das Ergebnis wird dich überraschen.
- Wähle eine beliebige Zahl von 1 bis 9. Multipliziere sie mit 12 345 679. (Die 8 ist absichtlich ausgelassen.) Auch hier erhältst du ein überraschendes Produkt.
- Wenn man vier aufeinander folgende gerade Zahlen addiert, erhält man 348. Wie heißen die vier Zahlen?

Eine Aufgabe anderer Art und in verschiedener Hinsicht anspruchsvoller ist die „Teilbarkeit durch 7".

Aufgabe *Teilbarkeit durch 7*

Welche durch 7 teilbare Zahl ergibt beim Teilen durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1? Gibt es mehrere solcher Zahlen?

Lösung: Zahlen der Gestalt $301 + 420 \cdot n,\ n \in \mathbb{N}$

Von Käpnick für Grundschulkinder vorgeschlagen (2014, S. 11), stellt die Aufgabe für die MFU-Teilnehmer in der Regel dennoch eine ziemliche Herausforderung dar, vor allem was die zweite, offene Frage betrifft, die für die Kinder kein klares Ziel im bisher gewohnten Sinn vorgibt. Die Lösungsquote ist daher, auch bereits bei der ersten Frage, um einiges geringer als bei den bisher vorgestellten Aufgaben. Das hängt auch mit der hier geforderten Ausdauer und notwendigen Strukturierung und Verbindung von Teilergebnissen zusammen. Anforderungen, die durchaus dazu führen, dass manche Kinder sich lieber wieder einfacheren Aufgaben zuwenden, während andere erstaunlich ausdauernd ihre teilweise sehr spontanen Annahmen überprüfen, verwerfen, neue Annahmen treffen und versuchen ihre intuitiven Zugänge mit logischen Überlegungen zu verbinden. Insofern bietet diese Aufgabe viel Raum mathematisches Denken zu fördern, unterschiedliche Strategien selbstständig zur Anwendung zu bringen und auch überfachliche Fähigkeiten zu schulen.

Problemlöseaufgaben mit gänzlich offenem Zielzustand werden, wie oben erwähnt und begründet, weniger verwendet, aber auch nicht ganz ausgeklammert.

Aufgabe *Treppenzahlen*

Manche Zahlen lassen sich als Summe aufeinander folgender Zahlen schreiben.

Beispiele:	9 = 4 + 5	Treppe mit zwei Stufen
	9 = 2 + 3 + 4 oder 12 = 3 + 4 + 5	Treppen mit drei Stufen

Ist die Zahl 8 eine Treppenzahl, also als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellbar? Findest du weitere Treppenzahlen? Was kannst du alles über Treppenzahlen herausfinden?

Quelle: Philipp, 2015, S. 35f.

Philipp stellt die Aufgabe im Kontext des „Experimentierens mit Zahlen" vor, tatsächlich bietet diese Aufgabe mit ihrem einfachen Einstieg und ihrer letztlich komplexen Fragestellung Raum zum Probieren auf sehr unterschiedlichen Niveaus. Viele typisch mathematische Tätigkeiten, wie Probieren, Vermuten, Überprüfen, Verwerfen werden herausgefordert. Manch jüngerer Mathe-Fan kommt allerdings nicht so ganz mit der fehlenden Abgrenzung des Zielzustandes zurecht, deshalb wird die Aufgabe meist als Alternativaufgabe angeboten.

Im Kurs bleibt selbstverständlich immer Zeit für Aufgaben, Rätsel oder Themen, die von den Teilnehmerinnen eingebracht werden. Neben bekannten Knobelaufgaben oder Klassikern wie den „Weizenkörnern am Schachbrett“ sind immer wieder auch neue Herausforderungen für die Kursleiter dabei, was die Kinder natürlich besonders freut und frischen Schwung in den Kurs bringt.

2.3 Ansprüche an eine MFU-Aufgabe

Nachstehend werden die Anforderungen an MFU-Aufgaben für die 5. und 6. Schulstufe, die sich teils aus dem bereits Gesagten ergeben, teils noch erläutert und zusammengefasst:

- *Die Aufgabe ist für die Schülerinnen und Schüler neu:*
  In Evaluierungen der Kurse, die vor allem in den ersten Kursjahren durchgeführt wurden, wurde die Frage nach der Motivation für den Kursbesuch oft mit dem Wunsch nach Abwechslung zu den Routineaufgaben im schulischen Unterricht beantwortet. Sich mit neuartigen Problemstellungen auseinanderzusetzen zu können, ist eine Erwartungshaltung, die praktisch alle Kursteilnehmer mitbringen.
- *Das Bearbeiten der Aufgabe macht den Teilnehmern Spaß:*
  Ein Anspruch, der im Vergleich zum Regelunterricht leichter erfüllt werden kann. Die bereits auch oben angesprochene hohe intrinsische Motivation der Schülerinnen und Schüler sich sogar mit vergleichsweise trockenen Aufgaben engagiert auseinanderzusetzen und die Möglichkeit des flexiblen Umgangs mit Aufgaben im Kurs sind gute Voraussetzungen, um diesen Anspruch tatsächlich auch oft erfüllen zu können. Im Prinzip sind alle Aufgaben Wahlaufgaben, Alternativen stehen immer zur Verfügung.
- *Es gibt vielfältige Möglichkeiten das Ergebnis zu erreichen:*
  So wichtig mathematisches Handwerkszeug ist, dessen Einübung ist kein Ziel von MFU, Routineaufgaben spielen keine Rolle. Viel mehr sollen die Aufgaben die Kreativität der Schülerinnen und Schüler ansprechen und fördern.
- *Die Aufgabe muss subjektiv gesehen anspruchsvoll sein:*
  Die Erfahrungen aus dem Kurs zeigen, dass (zu) leichte Aufgaben bei diesen Schülerinnen und Schülern eher unbeliebt sind. Über die Jahre hat sich außerdem manifestiert, dass die meisten der Kursteilnehmer weit weniger leicht als ihre Altersgenossen durch Misserfolge beim Lösen einer Aufgabe demotivieren lassen. (Zu) schwierige Aufgaben sind daher weniger problematisch als im Regelunterricht. Selbstverständlich gilt es aber die Gratwanderung zwischen zu schwierig und zu leicht zu meistern, denn Erfolgserlebnisse sind wohl *der* Motor für erfolgreiches Weiterlernen. Die oben angesprochene Flexibilität im Umgang mit den Aufgaben erleichtert es, auf die unterschiedlichen Voraussetzungen und Fähigkeiten der Kinder Rücksicht zu nehmen.
- *Die Aufgabe bringt eine natürliche Differenzierung mit sich:*
  Dieser Anspruch ergibt sich wie in jeder Lernendengruppe aus den soeben erwähnten, unterschiedlichen Voraussetzungen, die auch die Teilnehmer von MFU mitbringen, wenn auch die meisten über dem Durchschnitt liegende mathematische Fähigkeiten auszeichnen. Je offener eine Aufgabe ist, desto leichter kann sie den Anspruch der Differenzierung erfüllen, wie z. B. die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Treppenaufgabe. Dennoch ergibt sich der nachstehende Anspruch an die Aufgaben, der mit dem Anspruch an Differenzierung in Einklang gebracht werden muss.
- *Die Mehrzahl der Aufgaben hat ein eindeutiges Ergebnis:*
  Erfahrungsgemäß sehen Kursteilnehmer der 5. und 6. Schulstufe Erfolg im Erreichen eines konkreten Ergebnisses, bei dem zweifelsfrei klar ist, wann es erreicht ist. Aufgaben, die dies ermögli-

chen, sind daher bei den meisten beliebter, als solche, die kein klar definiertes Ziel haben. Zu erkennen, dass unterschiedliche Lösungen abhängig von Nebenbedingungen oder Modellvoraussetzungen alle richtig oder zumindest möglich sein können, erfordert vielschichtige Denkprozesse, die es zu entwickeln gilt: Je älter die Lernenden, desto offener hinsichtlich Lösungserwartungen darf die Aufgabe sein.

2.4 Kursinhalte der 7. und 8. Schulstufe

Ergänzend wird noch kurz auf die Kurse für die älteren Mathe-Fans eingegangen und einige Aufgaben bzw. Themen angeführt, mit denen bereits gearbeitet wurde. Die Kurse für die 13 und 14-jährigen Schülerinnen und Schülern verfolgen grundsätzlich dasselbe Ziel wie jene für die jüngeren Mathe-Fans. Unterschiede in den Kursinhalten ergeben sich neben der altersadäquaten Passung hauptsächlich aus den Voraussetzungen, auf die aufgrund des schulischen Unterrichts, auch in sprachlicher Hinsicht, aufgebaut werden kann.

Damit kann die Erarbeitung neuer Themen oder Anwendungen auch in teilweise selbstständiger, aber sehr gut betreuter Form, die an entscheidenden Stellen oder auf Wunsch der Teilnehmer für Unterstützung sorgt, erfolgen. Beispiele für solche Themen, die in den Kursen schon bearbeitet wurden, sind „Prüfziffern" oder „Fraktale". Bei erstem geht es beispielsweise um die Prüfziffern auf Bankscheinen oder die Sozialversicherungsnummer, das Thema lässt sich je nach Interesse der Teilnehmer vertiefen oder in der Breite ausdehnen, viele Informationen dazu sind im Internet verfügbar.

Wenn es um konkrete Aufgaben geht, sind nun auch in fachlicher Hinsicht für Klassiker die Voraussetzungen gegeben, wie das von Leonhard Euler formulierte Königsberger Brückenproblem oder die „Weizenkörner am Schachbrett", für dessen Bearbeitung ab der siebten Schulstufe die Potenzschreibweise zur Verfügung steht.

Aufgabenstellungen zum geschickten Zählen (vgl. Aufgabe „Diagonalen im n-Eck" aus 2.1 oder Aufgabe „Band" aus dem folgenden Abschnitt 3.2) bieten sich auch für diese Altersstufe an und können je nach Fähigkeiten und Engagement der Teilnehmer bis hin zu komplexeren kombinatorischen Problemen erweitert werden.

Reine Argumentationsaufgaben können eine immer gewichtigere Rolle erhalten. Mit interessierten Jugendlichen der 8. Schulstufe ist die Diskussion um die Frage

Gilt $0{,}\dot{9} = 1$?

immer eine spannende. Auch wenn auf diesem Ausbildungsniveau noch nicht alle Voraussetzungen gegeben sind (beispielsweise Reihenentwicklung) um die Frage umfassend zu betrachten, so kann doch mit dem zur Verfügung stehendem Fachwissen eine Klärung erarbeitet werden und – vielleicht noch wichtiger an dieser Stelle – ein neuer Aspekt mathematischen Denkens angeregt werden, denn auch das Tor zu philosophischen Betrachtungen öffnet sich in Diskussionen um diese Frage meist einen Spalt weit.

3. Empirische Studie zum Problemlösen

3.1 Motivation, Grundidee und Vorgaben für die Studie

Mathematikdidaktiker und Praktiker sind sich längst einig, dass Problemlösen im schulischen Mathematikunterricht seinen Platz haben muss, Lehrplan und Bildungsstandards fordern es gesetzlich verankert ein. Dennoch fristet dieser sowohl aus fachlicher als auch aus überfachlicher Sicht so relevante Bereich im realen Schulalltag noch zu oft ein eher stiefmütterliches Dasein. Das mag schon auch an

Rahmenbedingungen liegen, sicher aber auch daran, dass es nicht nur die Lernenden, sondern auch die Lehrenden vor besondere Herausforderungen stellt. Daher ist es besonders wichtig, dass dem Problemlösen in der Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern ein hoher Stellenwert zukommt. Die Curricula berücksichtigen das in der Regel gut, um das theoretische Wissen der Studierenden zur Durchführung eines Unterrichts, der Problemlöseprozesse ermöglicht und fördert, ist es daher meist gut bestellt. Um dieses Wissen auch um praktische Erfahrungen zu erweitern und damit die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass es im Klassenzimmer tatsächlich Anwendung findet, wurden gemeinsam mit Studierenden[2] im Kurs MFU Problemlöseprozesse beobachtet und analysiert. Die hohe Bereitschaft der Kursteilnehmer, sich Problemlöseaufgaben zu widmen und das Fehlen von Störungen unterschiedlicher Art, wie sie im Regelunterricht aus organisatorischen oder anderen Gründen immer wieder auftreten können, machen den Kurs zu einem idealen Forschungsort.
Mit zwei Seminargruppen wurden in zwei aufeinander folgenden Schuljahren insbesondere Problemlösestile, wie also Kinder versuchen Problemlöseaufgaben zu bewältigen, unter die Lupe genommen. Es zeigte sich, dass eine Typenbildung von Problemlösestilen, wie sie Käpnick (2014, S. 119ff.) darlegt, sich als Grundlage für die Einordnung der Beobachtungsergebnisse sehr gut eignet.

Selbstverständlich müssen die Ergebnisse unter Berücksichtigung der besonderen Rahmenbedingungen eingeordnet werden und lassen keine direkten Rückschlüsse auf den Regelunterricht zu.

Die aus subjektiver Sicht der Studierenden als sehr gewinnbringend für die eigene künftige Unterrichtstätigkeit eingeschätzten Beobachtungen und Analysen regten zur Konzeption einer Studie an, die speziell in Problemlöseprozessen eingesetzt Transferleistungen untersucht.

Zur Durchführung der Studie wurde basierend auf der Vorgabe des Arbeitens mit so genannten **strukturverwandten Aufgaben** eine Bachelorarbeit vergeben. Der Begriff wurde eigens für die Studie wie folgt festgelegt:
Problemlöseaufgaben, die sich mit derselben Problemlösestrategie gut bearbeiten bzw. lösen lassen, werden als strukturverwandte Aufgaben bezeichnet.

Strukturverwandte Aufgaben zeichnen sich also in der Regel nicht durch gleichartigen Aufbau oder gleiche Kontexte aus, sie können auf den ersten Blick sehr unterschiedlich erscheinen. Erkennen von Strukturverwandtschaft setzt das vollständige Erfassen der Aufgabe voraus.

Der für die Begriffsfestlegung zentrale Begriff „Problemlösestrategie" wurde und wird in der fachdidaktischen Literatur ausführlich diskutiert. Für die im Rahmen der Bachelorarbeit von Kittler (2016) durchgeführte Studie wurde auf Ideen nach Pólya, die zehn von Posamentier und Krulik dargelegten Problemlösestrategien und die Klassifizierung von Bruder und Collet zurückgegriffen. (vgl. Pólya 2010, S. 18ff., Posamentier & Krulik 1998, S. 4ff. und Bruder & Collet 2011, S. 37ff.) Wenn auch Bruder und Collet durch die Unterscheidung in heuristische Strategien, heuristische Hilfsmittel, heuristische Prinzipien und heuristische Regeln anders strukturieren als Posamentier und Krulik bzw. Pólya, so sind doch begriffsmäßig viele Überlappungen vorhanden. Für die Konzeption und Auswertung der Studie wurden die im deutschsprachigen Raum üblichen, auch von Bruder und Collet benutzten Bezeichnungen verwendet.

3.2 Studiendesign und Aufgabenbeispiele

Die zentrale Frage der Studie lautete, inwieweit Schülerinnen und Schüler des MFU-Kurses selbständig Strukturverwandtschaft zwischen Aufgaben erkennen und Problemlösestrategien erfolgreich zum Lösen strukturverwandter Aufgaben übertragen.

[2] Studierende in der MathematiklehrerInnenausbildung für NMS an der KPH Wien/Krems

Um Aussagen über diese Transferfähigkeit machen zu können, ist eine fundierte Aufgabenauswahl notwendig. Mit dem Ziel eine möglichst gelungene Zuordnung Problemlösestrategie–Aufgabe zu erreichen, wurden manche Aufgaben einem Vortest unterzogen, um abzuklären, ob die vermutete oder von Autorinnen bzw. Autoren angegebene Problemlösestrategie tatsächlich höchste Relevanz für die Aufgabe hat. Der damit verbundene Aufwand führte dazu, dass das ursprünglich vorgesehene Entwickeln eigener Aufgaben, verworfen wurde und größtenteils (sprachlich adaptierte) Aufgaben aus der Literatur für die Studie eingesetzt wurden.

An drei Kursterminen der sechsten Schulstufe wurden insgesamt acht Aufgaben zu den Problemlösestrategien „Rückwärtsarbeiten", „systematisches Probieren" und dem „Invarianzprinzip" eingesetzt. An jedem Termin wurden Aufgaben zu einer der drei genannten Problemlösestrategien abwechselnd mit anderen, nicht strukturverwandten Aufgaben von den Kursteilnehmern bearbeitet. Für die Problemlöser war dabei nicht klar, worum es in der Studie ging bzw. welche Aufgaben zur Studie gehörten und welche nicht. Dass eine Studie durchgeführt wird, wurde selbstverständlich mitgeteilt.

Insgesamt wurden 138 schriftlich vorliegende Lösungswege analysiert. Die beiden nachstehenden Abbildungen 2 und 3 zeigen neben der Angabe jeweils eine gut nachvollziehbare Bearbeitung.

Bei der Aufgabe „Murmeln" (Bruder 2014, S. 40) in Abbildung 2 handelt es sich um eine Aufgabe zur Problemlösestrategie „Rückwärtsarbeiten". Der Lösungsweg zeigt Rückwärtsarbeiten in Reinkultur, die gelungene Verbalisierung deutet neben der hohen mathematischen auch auf hohe sprachliche Kompetenz des Kindes hin.

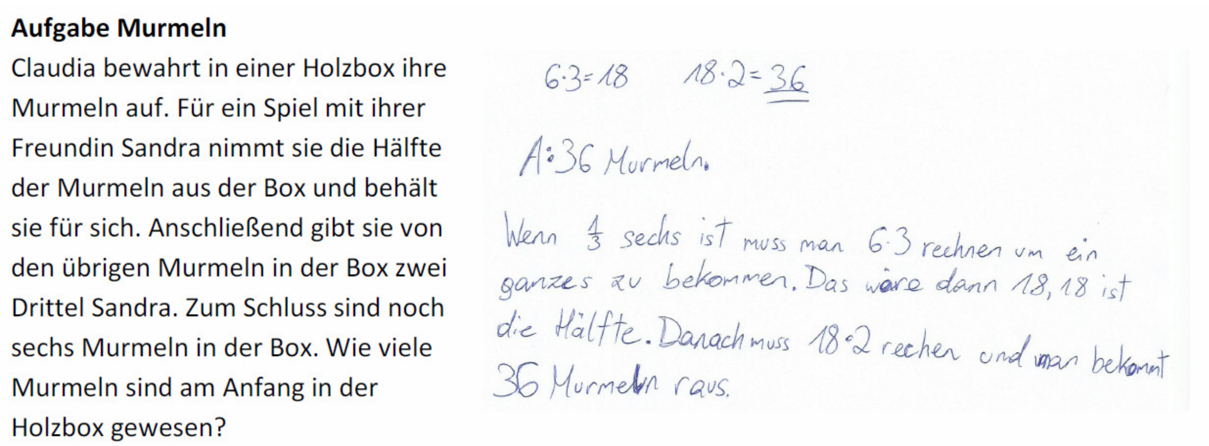
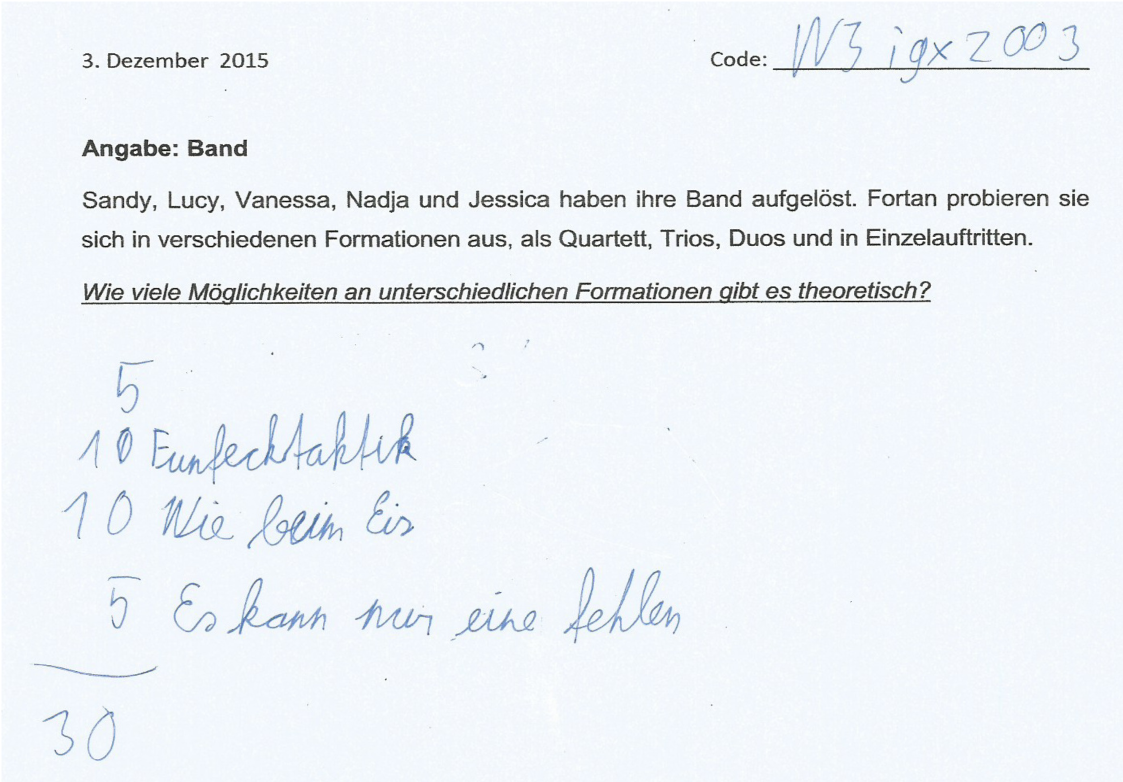


Abbildung 2: Ausarbeitung zur Aufgabe „Murmeln"

In Abbildung 3 ist die Aufgabe „Band" (Leuders 2010, S. 18) zur Problemlösestrategie „Systematisches Probieren" dargestellt. Bei diesem Lösungsweg sind Transferleistungen in mehrfacher Hinsicht zu erkennen. Es wird hier zwar nicht probiert aber die Aufgabe souverän durch systematisches Zählen gelöst. Der Kommentar „Wie beim Eis" zeigt das Erkennen der Strukturverwandtschaft mit einer zur Studie gehörenden, in derselben Einheit durchgeführten Aufgabe und bezieht sich offensichtlich auf das Ermitteln der Anzahl der Möglichkeiten für Trios. Das Schlagwort „Fünfecktaktik" weist offensichtlich darauf hin, dass die Anzahl der Möglichkeiten für ein Duo gleichgesetzt wird mit der Anzahl der Diagonalen und Seiten in einem Fünfeck. Ob hier die Parallele zur Aufgabe „Diagonalen im *n*-Eck" (vgl. Abschnitt 2.1 des Artikels) aus einem viel früheren Kurstermin oder zu einer Aufgabe bzw. Überlegung außerhalb des Kurses gezogen wurde, ist nicht bekannt. Jedenfalls lieferten dieser und andere Lösungswege einen deutlichen Hinweis darauf, dass erfolgreiche Problemlöser bestrebt sind, Lösungsstrategien bzw. Ergebnisse möglichst zu übertragen.



3. Dezember 2015 Code: W3 igx 2003

Angabe: Band

Sandy, Lucy, Vanessa, Nadja und Jessica haben ihre Band aufgelöst. Fortan probieren sie sich in verschiedenen Formationen aus, als Quartett, Trios, Duos und in Einzelauftritten.

Wie viele Möglichkeiten an unterschiedlichen Formationen gibt es theoretisch?

5
10 Einfechtaktik
10 Wie beim Eis
5 Es kann nur eine fehlen

30

Abbildung 3: Ausarbeitung zur Aufgabe „Band“

Klarerweise nicht alle, aber überraschend viele Lösungswege wurden so gut nachvollziehbar dargelegt. Außerdem wurde gegebenenfalls punktuell während des Erhebungstermins mündlich nachgefragt, um Lösungswege besser auswertbar zu machen.

3.3 Auswertung der Studie

Die Auswertung erfolgte anhand eines Kategoriensystems, das neben der Kategorie „Transfer von Problemlösestrategien“ auch die Kategorie „Verwendete Problemlösestile“ und die Kategorie „Verwendete Hilfsmittel – Wechsel der Darstellungsebene“ beinhaltete (Kittler 2016, S. 63). Die Auswertung der hier zuletzt genannten Kategorie diente allerdings hauptsächlich als Hilfestellung zur besseren Einordnung in die beiden anderen Kategorien.

In der Kategorie „Problemlösestile“ wurde eine leicht adaptierte, literaturbasierte Typenbildung nach Käpnick (2014, S.119ff.) verwendet, deren Tauglichkeit für die gegebene Forschungssituation in den Vorarbeiten mit den beiden Seminargruppen empirisch abgesichert wurde (vgl. Abschnitt 3.1.). Die Typen werden hier nur schlagwortmäßig aufgelistet:

- Hartnäckiges Probieren
- Abwechselndes Probieren und Überlegen
- Intuitives Erahnen bzw. Herantasten an eine Lösung
- Systemhaftes, überlegtes Vorgehen
- Mischtyp
- Keine Einordnung möglich

Erwartungsgemäß zeigte die Auswertung einen hohen Anteil des Typs „systemhaftes Vorgehen“. Einen unerwartet geringen Anteil wies der Typ „intuitives Erahnen“ auf. Unerwartet, da nicht nur die

Beobachtungsergebnisse mit den beiden Studierendengruppen, sondern auch viele persönliche Eindrücke der Autorin im Kurs MFU „intuitives Erahnen" als einen wesentlichen Aspekt des Problemlösens bei vielen Teilnehmern der MFU-Kurse vermuten ließen. Es ist offen, ob dieses Teilergebnis mit dem Studiendesign zusammenhängt oder ob „intuitives Erahnen einer Problemlösung" in weniger gut dokumentierten Beobachtungen zu vorschnell angenommen wird.

In der Kategorie „Transfer von Problemlösestrategien" wurde zwischen den folgenden drei Stufen unterschieden:

- Keine Transferleistung erkennbar:
  Zusammenhänge zu bereits gelösten strukturverwandten Aufgabenstellungen werden nicht erkannt bzw. nicht hergestellt.
- Erkennen der Strukturverwandtschaft, aber kein erfolgreicher Transfer:
  Der Zusammenhang zu strukturverwandten Aufgaben wird erkannt, entsprechende Ansätze zur Problemlösung sind vorhanden, der Versuch mit der Strategie zur Lösung zu kommen bleibt erfolglos.
- Erfolgreicher Einsatz bereits bekannter Problemlösestrategien

Zunächst ist festzuhalten, dass mit der Zuordnung eines Lösungsweges zu einer Stufe keine Bewertung einhergeht. Denn es wird hier eben nur die Transferleistung in den Fokus genommen, andere Merkmale von Lösungswegen, wie beispielsweise Kreativität bleiben unberücksichtigt. Die Auswertung zeigt aber einen deutlichen Zusammenhang zwischen dem Ausnutzen von Strukturverwandtschaft und erfolgreicher Lösung.

Von den insgesamt 24 an der Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schülern konnten 20 mindestens einmal die dritte Stufe erreichen, also erfolgreich eine aus einer strukturverwandten Aufgabe bereits bekannte Problemlösestrategie einsetzen. Nur zwei Kindern gelang es nie, Strukturverwandtschaft von Aufgaben zu erkennen. (vgl. Kittler 2016, S. 79f.)

Dieses Ergebnis hängt mit den günstigen Voraussetzungen wie überdurchschnittlicher Fachkompetenz und hohem Motivationsgrad der MFU-Teilnehmer zusammen. Die Analyse der Lösungswege zeigte aber auch, dass die erfolgreichen Problemlöser Strukturverwandtschaft gut erkannten und zweitens immer versuchten diese auch zu nutzen. Erst wenn dies nicht gelang, wurde eine alternative Lösungsmöglichkeit gesucht. Dieses Ergebnis motiviert strukturverwandte Aufgaben beim Lernen von Problemlösen im schulischen Mathematikunterricht einzusetzen, wie im nachfolgenden Ausblick noch erläutert wird.

4 Fazit und Ausblick – Problemlösen lernen mit strukturverwandten Aufgaben

Problemlösen mit den Mathe-Fans ist meist ein Vergnügen, angefangen bei ihrer Grundhaltung bringen viele beste Voraussetzungen dafür mit. Unter der Bedingung einer gelungenen Aufgaben- und Themenauswahl – die Anforderungen an diese wurden in Abschnitt 2.3 dargelegt – ist es für die Kursleiter leicht, Problemlöseprozesse in Gang zu setzen. Wesentlich dabei ist, selbst die Bereitschaft für flexibles Denken mitzubringen, um auf Lösungsansätze und Argumentationen, seien sie auch noch so kreativ, eingehen zu können. Das erwarten die Teilnehmer völlig zu recht. Hinter vermeintlich falschen Ansätzen verbergen sich allzu oft sehr wohl auch richtige oder zumindest ansatzfähige Überlegungen, die es nicht zu übersehen gilt.

Problemlösen zu lehren bzw. zu lernen stellt im Regelunterricht der Sekundarstufe 1 alle Beteiligten meist vor größere und andere Herausforderungen als im Kurs MFU. „Kreativ sein" per se kann man nicht lehren. Wenn sich aber erfolgreiches Problemlösen, wie die vorgestellte Studie zeigt, selbst bei kreativen Problemlösern wesentlich dadurch auszeichnet, den Transfer von Problemlösestrategien zu nutzen, so spricht das dafür, diese Fähigkeit gerade bei Lernenden, die weniger Kreativität bzw. Be-

geisterung für ein Fach mitbringen, besonders zu fördern. Dafür bietet das Arbeiten mit strukturverwandten Aufgaben ein großes Potential. Das Übertragen von bereits bekannten Strategien auf subjektiv neuartige, aber strukturverwandte Aufgabenstellungen immer wieder in möglichst selbstständiger Durchführung von den Lernenden einzufordern, ist ein guter Ansatzpunkt zur Ausbildung eines Reservoirs an Strategien, das letztlich zu echtem, eigenständigem Problemlösen verhilft.
Für den Einstieg in das Arbeiten mit strukturverwandten Aufgaben empfehlen sich aufgrund der Studienergebnisse Aufgaben zur Problemlösestrategie „systematisches Probieren". Bei diesen konnte der erfolgreiche Transfer am häufigsten beobachtet werden. Außerdem lässt sich, trotz unterschiedlicher Kontexte und Fragestellungen, die Hürde des Erkennens der Strukturverwandtschaft bei diesen Aufgaben niedrig ansetzen und damit der Weg zu (zumindest teilweisen) Erfolgserlebnissen für die Lernenden ebenen – ein wichtiger Aspekt um Motivation, ohne die erfolgreiches Problemlösen wohl kaum möglich ist, aufzubauen bzw. zu fördern.
Viel mehr als in einem Kurs mit speziell Interessierten wie MFU, geht es im schulischen Unterricht auch darum, überfachliche Fähigkeiten, wie z. B. das rege, flexible Denken, die Anstrengungsbereitschaft oder die Ausdauer zu fördern. Strukturverwandtschaft von Problemlöseaufgaben zu erkennen und Strategien zu ihrer Lösung erfolgreich zu übertragen, fordert diese Fähigkeiten heraus und trägt damit zu ihrer Entwicklung bei.

Literatur

Bruder, R.; Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (2014): Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In: Bruder , R. (Hrsg.): *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*, 18-52. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1.* Stuttgart: Klett Verlag.

Hauer-Typpelt, P. (2011): Angemessene Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft,* 43, 75-87.
Online: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragHauerTyppelt.pdf (Zugriff: 26.9.2016)

Heinrich, F. et al. (2015): Problemlösen lernen. In: Bruder, R. et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. 279-301. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Kittler, J. (2016): *Strukturverwandte mathematische Problemstellungen und Aufgaben. Eine Potenzialanalyse hinsichtlich der Förderung mathematischer Kompetenzen.* Bachelorarbeit an der KPH Wien/Krems.

Leuders, T. (2010): *Erlebnis Arithmetik. Zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Pólya G.(2010): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Narr Francke Attempto. (Sonderausgabe der 4. Auflage der Originalausgabe von 1949)

Philipp, K. (2015): Kinder experimentieren mit Zahlen – Eine mathematische Tätigkeit unter der Lupe. In: Caluori F. et al. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.* 1, 34-41. Münster: WTM-Verlag.

Posamentier, A.; Krulik, S. (1998): *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions. A ressource fort he mathematics teacher.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Verfasserin

Petra Hauer-Typpelt
KPH Wien/Krems
Mayerweckstraße 1
1210 Wien

petra.hauer-typpelt@kphvie.ac.at